Факултет техничких наука у Чачку
Универзитет у Крагујевцу
30.06.2022

Пријемни испит из

МАТЕМАТИКЕ

1. Израчунати:

$$\left[10 : \left(2\frac{1}{3} + 4\right)^{-1} + \frac{53}{3}\right]^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\right).$$

Решење:

$$\begin{aligned} & \left[10 : \left(2\frac{1}{3} + 4\right)^{-1} + \frac{53}{3}\right]^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\right) \\ = & \left[10 : \frac{3}{19} + \frac{53}{3}\right]^{1/2} \cdot \frac{8}{24} = \left[\frac{10}{1} \cdot \frac{19}{3} + \frac{53}{3}\right]^{1/2} \cdot \frac{1}{3} \\ = & \sqrt{\frac{190 + 53}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{243}{3}} \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3. \end{aligned}$$

2. Ако је полином $P(x) = x^8 + 2x^3 - ax + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$ дељив са $x^2 + 1$, одредити вредност израза $a^2 + b^2$.

Решење: Ако полином $P(x) = x^8 + 2x^3 - ax + b$ поделимо са $x^2 + 1$, добићемо количник $x^6 - x^4 + x^2 + 2x - 1$ и остатак $-(a+2)x + b + 1$. Према услову задатка мора бити $-(a + 2)x + b + 1 = 0$, односно $-(a + 2) = 0$ и $b + 1 = 0$. Одавде је $a = -2$ и $b = -1$, па је $a^2 + b^2 = 5$.

3. Решити експоненцијалну једначину

$$4^{x-\sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-2}} = 1.$$

Решење: Дата једначина има смисла ако је $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Једначину можемо записати у облику

$$2^{2(x-\sqrt{x^2-2})} - \frac{3}{2} \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-2}} - 1 = 0.$$

Увођењем смене $2^{x-\sqrt{x^2-2}} = t$ $(t > 0)$ једначина се своди на квадратну једначину облика $t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0$, уз услов $t > 0$. Како су решења квадратне једначине $t = 2$ или $t = -\frac{1}{2}$ и како $t = -\frac{1}{2}$ не задовоља услов $t > 0$, то ћемо размотрити случај $t = 2$. Сада је $2^{x-\sqrt{x^2-2}} = 2$, тј. $x - \sqrt{x^2-2} = 1$, односно $x - 1 = \sqrt{x^2-2}$. Након квадрирања израза на левој и десној страни ове једначине добијамо $(x-1)^2 = x^2 - 2$, одакле је $x = \frac{3}{2}$.

4. Одредити збир решења једначине

$$\sin x + 1 - 2\cos^2 x = 0$$

на интервалу $[0, 2\pi]$.

Решење: Једначина $\sin x + 1 - 2\cos^2 x = 0$ еквивалентна је са једначином $\sin x + 1 - 2(1 - \sin^2 x) = 0$, односно са $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Увођењем смене $\sin x = t$ добија се квадратна једначина $2t^2 + t - 1 = 0$, чија су решења $t_1 = -1$ или $t_2 = \frac{1}{2}$. На интервалу $[0, 2\pi]$ једначина $\sin x = -1$ има само једно решење $x_1 = \frac{3\pi}{2}$, док једначина $\sin x = \frac{1}{2}$ има два решења $x_2 = \frac{\pi}{6}$ и $x_3 = \frac{5\pi}{6}$. Дакле, тражени збир решења је $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{2}$.

5. Одредити вредност параметра m тако да права $2x - y + 3 = 0$ буде нормална на праву $(2m-1)x + (m+1)y - 2 = 0$.

Решење: Коефицијент правца праве $2x - y + 3 = 0$, тј. $y = 2x + 3$ је $k_1 = 2$, док за праву $(2m-1)x + (m+1)y - 2 = 0$, тј. $y = \frac{1-2m}{m+1}x + \frac{2}{m+1}$ коефицијент правца је $k_2 = \frac{1-2m}{m+1}$. Ове две праве су нормалне ако и само ако је $k_1 k_2 = -1$, па је $2 \cdot \frac{1-2m}{m+1} = -1$, одакле је $\frac{2-4m}{m+1} + 1 = 0$, тј. $\frac{3-3m}{m+1} = 0$, па је $m = 1$.

6. Збир прва три члана аритметичког низа је 36, а збир квадрата прва три члана тог низа је 482. Одредити тај низ.

Решење: Ако са a и d обележимо први члан и разлику аритметичког низа, онда важи

$$a + (a+d) + (a+2d) = 36,$$
$$a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 482.$$

Из прве једначине је $d = 12 - a$, па заменом у другу једначину добијамо $a^2 - 24a + 119 = 0$, одакле је $a = 7$ или $a = 17$. За $a = 7$ је $d = 5$, а за $a = 17$ је $d = -5$. Дакле, тражени низ је $7, 12, 17, 22, \ldots$ или $17, 12, 2, -3, -8, \ldots$.